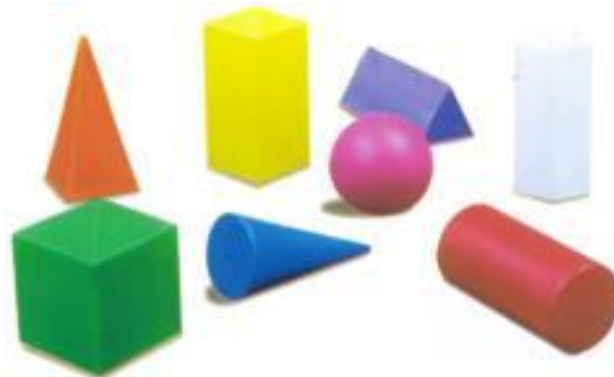


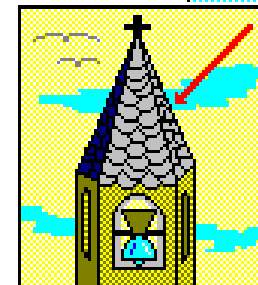
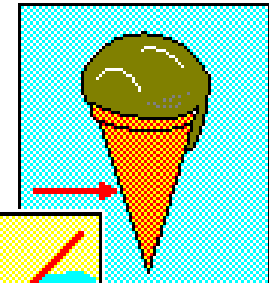
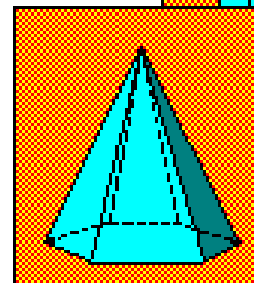
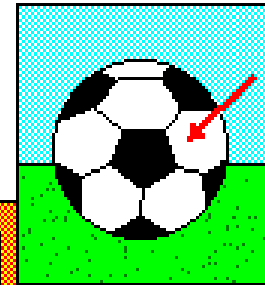
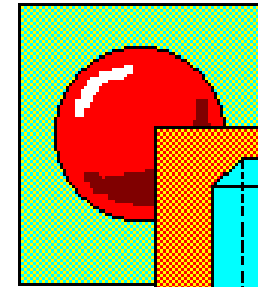
UNIDAD DIDACTICA

CUERPOS GEOMÉTRICOS

GEOMETRIA CLEI 5



IEPNO



Luis Fernando Upegui cardona

PENSAMIENTO ESPACIAL

UNIDIMENSIONAL

BIDIMENSIONAL

TRIDIMENSIONAL

LINEA

GEOMETRIA
PLANA

GEOMETRIA ESPACIAL

Desplazamientos

Manipulación

Representación

Relaciones

Perpendicularidad

Homotecias

Objetos en
reposo

Metricas

Deformaciones

Medida

Dibujos de vista
única, 3D

Infralógicas
Intrafigurales

Paralelismo

Reflexiones

Cálculo

Dibujos de vista
Múltiple

Topológicas

Lógicas
Interfigurales

ADIMENSIONAL

PUNTOS

TRANSFORMACIONES

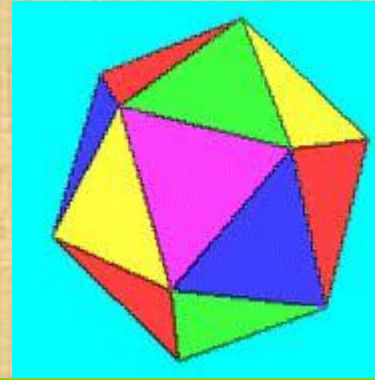
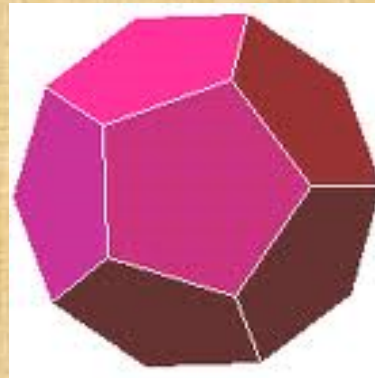
ÍNDICE

- ⊙ Poliedros.
- ⊙ Poliedros cóncavos y convexos.
- ⊙ Poliedros regulares.
- ⊙ Primas: elementos, clases, desarrollo plano, área.
- ⊙ Pirámide: elementos, clases, desarrollo, área.
- ⊙ Cuerpos de revolución: cilindro, cono y esfera.

POLIEDROS

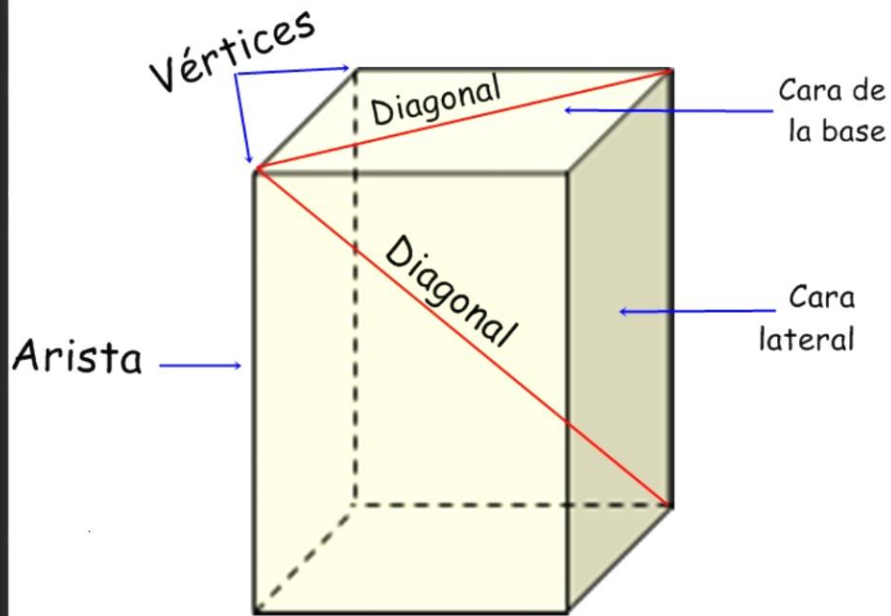


Un poliedro es un cuerpo geométrico limitado por caras en forma de polígonos.

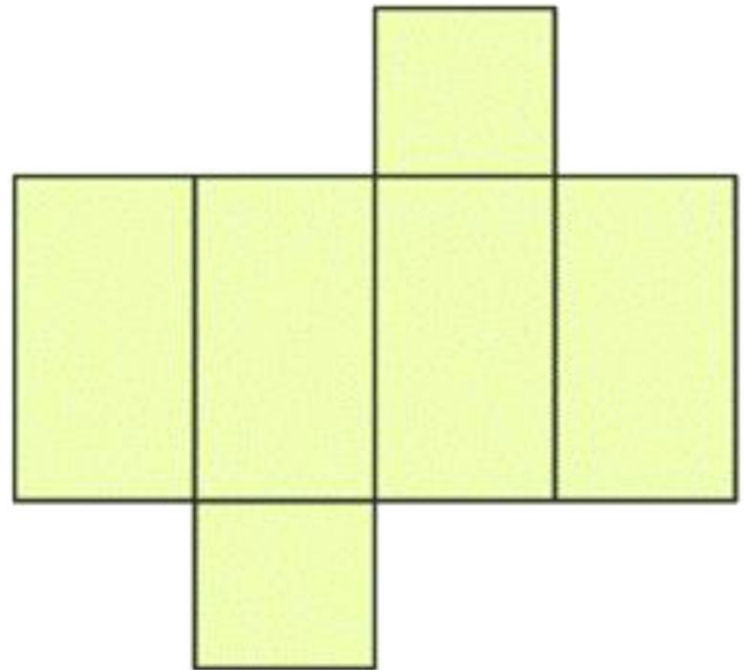


EJEMPLO:

Elementos de un poliedro



Desarrollo plano de un poliedro



Elementos de un poliedro

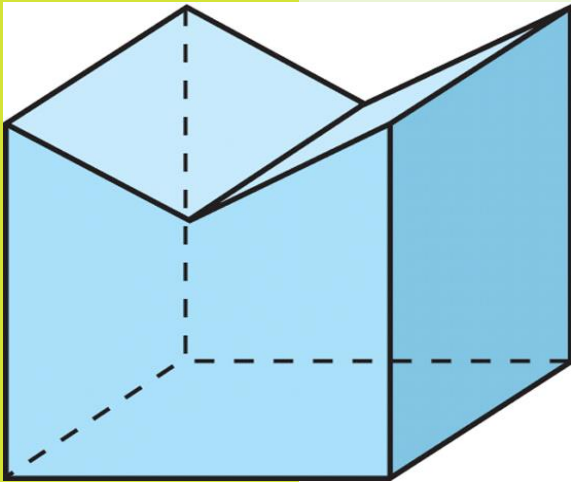
Los elementos de un poliedro son:

- Caras: son los polígonos que limitan el poliedro.
- Aristas: son las líneas donde concurren dos caras. Coinciden con los lados de las caras.
- Vértices: son los puntos donde se cortan tres o más aristas.
- Diagonal: es el segmento que une dos vértices que no están en la misma arista.
- Ángulo diedro: es el ángulo formado por dos caras.
- Ángulo poliedro: es el ángulo formado por tres o más caras, con un punto en común, el vértice.
- Desarrollo plano de un poliedro: es la superficie que resulta al extenderlo sobre un plano.

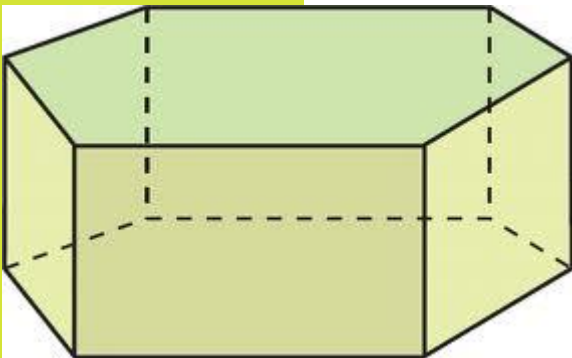
POLIEDROS REGULARES

Poliedros cóncavos y convexos.

Los poliedros pueden ser cóncavos y convexos.



- ⊙ Poliedros cóncavos: son aquellos en los que existe alguna cara que, al prolongarla, corta al poliedro.



- ⊙ Poliedros convexos: son los que, al prolongar cualquiera de sus caras, estas no cortan el poliedro.

FÓRMULA DE EULER

En los poliedros convexos se cumple la fórmula de Euler:

$$\mathbf{C} + \mathbf{V} = \mathbf{A} + \mathbf{2}$$

N.º de caras N.º de vértices N.º de aristas

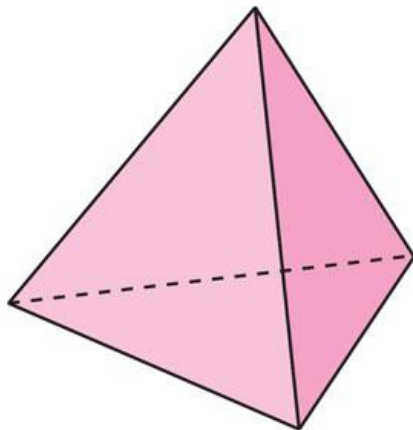


POLIEDROS REGULARES

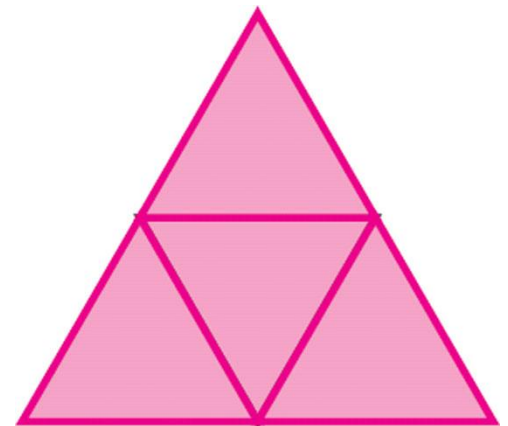
Un poliedro es regular cuando todas sus caras son polígonos regulares iguales y, además, en cada vértice concurre el mismo número de caras.

Solamente existen cinco poliedros regulares.

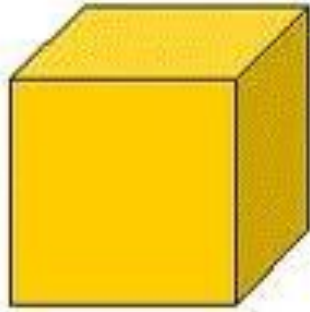
1. Tetraedro



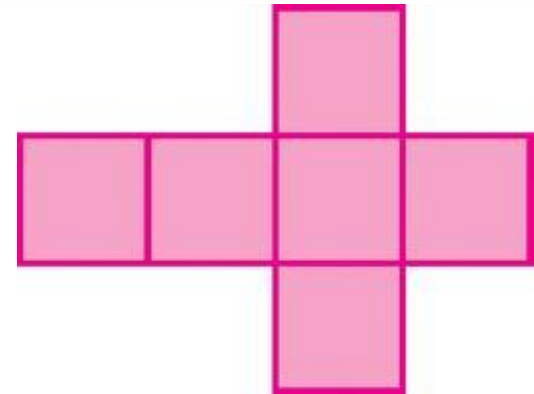
→
Tiene 4 caras, que
son triángulos
equiláteros.



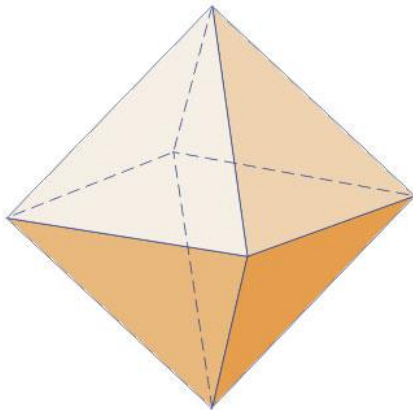
2. Cubo



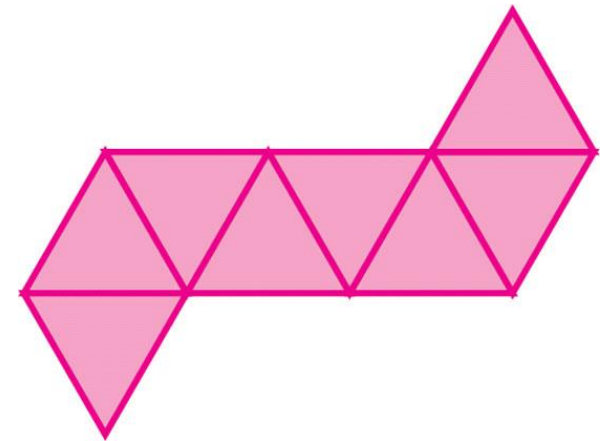
Tiene 6 caras, que son cuadrados.



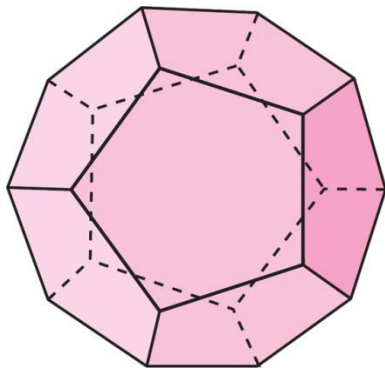
3. Octaedro



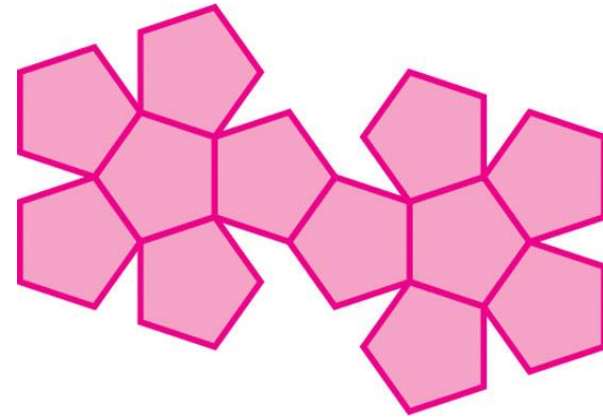
Tiene 8 caras, que son triángulos equiláteros.



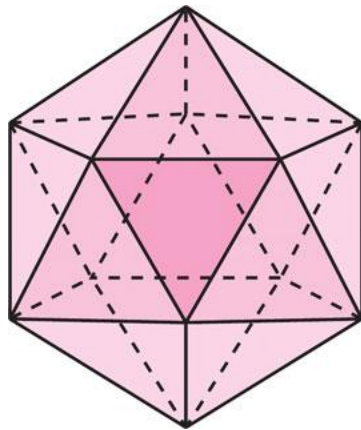
4. Dodecaedro



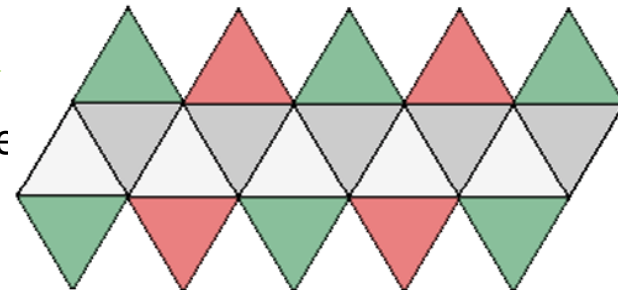
→ Tiene 12 caras, que son pentágonos regulares.



5. Icosaedro

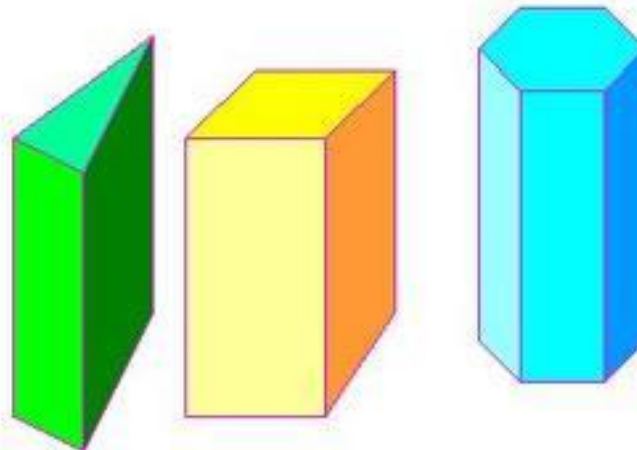


→ Tiene 20 caras, que son triángulos equiláteros.

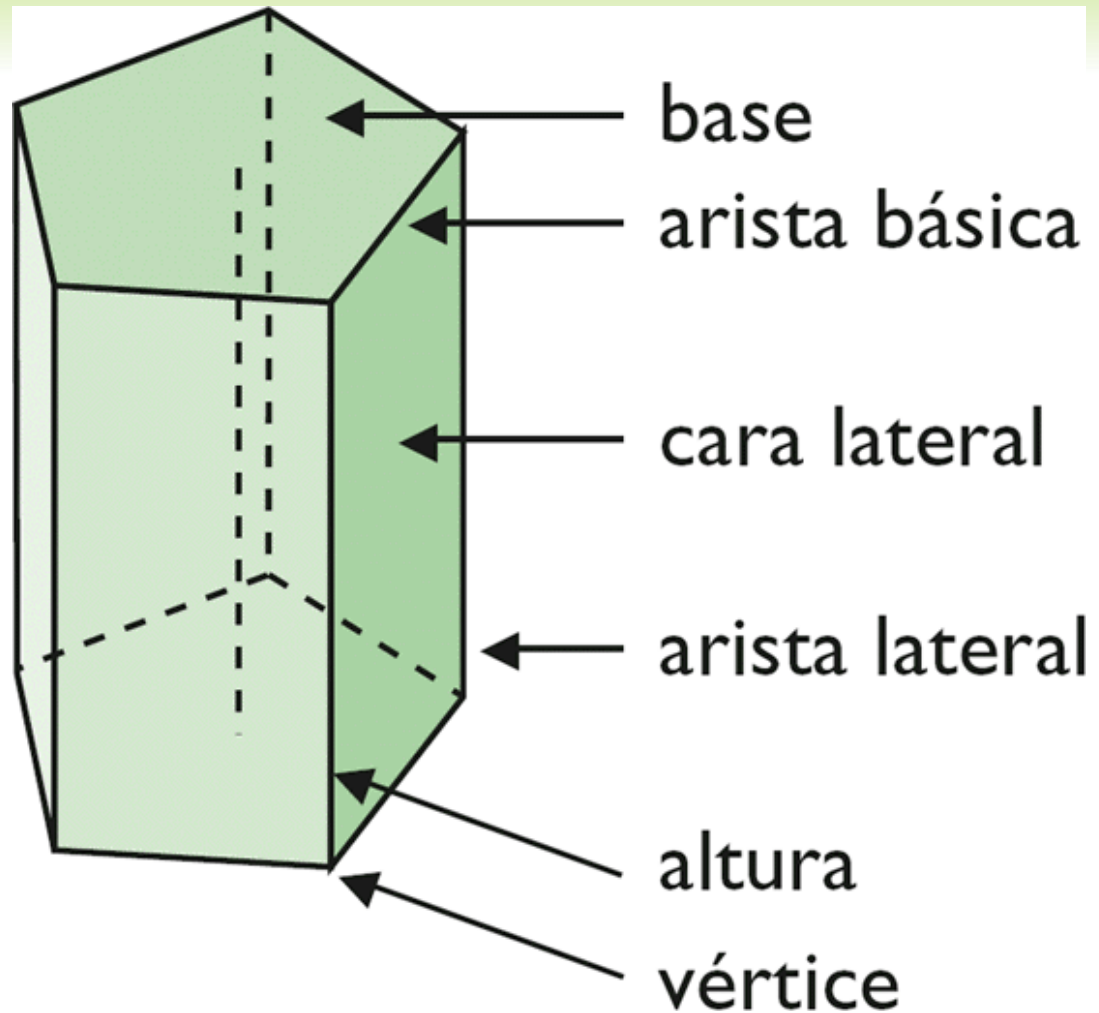


PRISMAS

Un prisma es un poliedro que tiene dos caras iguales y paralelas entre sí, llamadas bases, y cuyas caras restantes son paralelogramos.



EJEMPLO:



ELEMENTOS DE UN PRISMA

Los elementos de un prisma son:

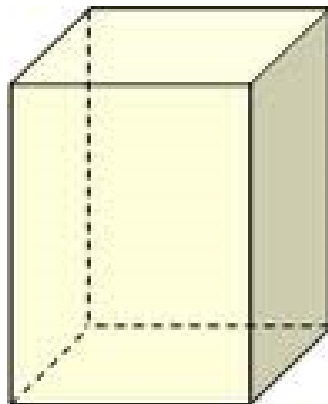
- Bases o caras básicas: son dos paralelogramos iguales situados en planos paralelos.
- Caras laterales: son paralelogramos.
- Aristas básicas: son los lados de los polígonos de las bases.
- Aristas laterales: son los lados de las caras laterales que unen las bases.
- Vértices: son los puntos donde se cortan las aristas.
- Altura: es la distancia entre las bases.

CLASES DE PRISMAS

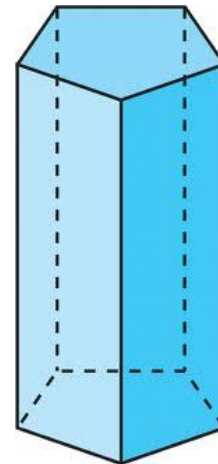
Para nombrar un prisma hacemos referencia a los polígonos de las bases.



Prisma
triangular



Prisma
cuadrangular



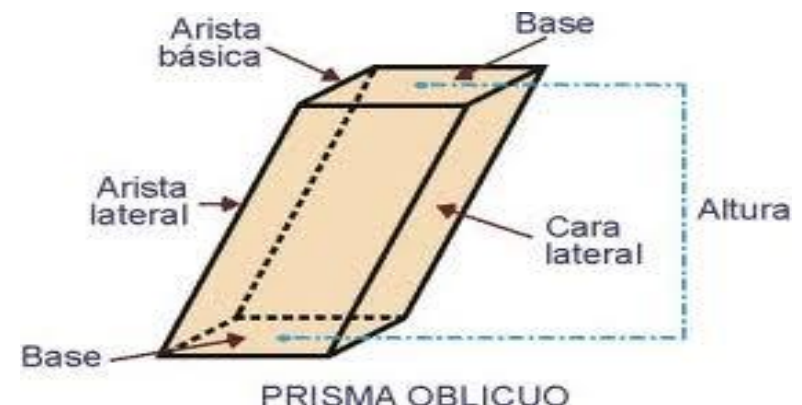
Prisma
pentagonal

Cuando las aristas laterales son perpendiculares a las aristas básicas se dice que el prisma es recto; en caso contrario, se llama prisma oblicuo.

Si, en los prismas rectos, los polígonos de las bases son polígonos regulares, se llaman prismas regulares; si no, son prismas irregulares.

Un tipo de prismas muy frecuentes es aquel cuyas caras son todas paralelogramos. Estos prismas se llaman paralelepípedos. Si, además, son rectos se denominan ortoedros.

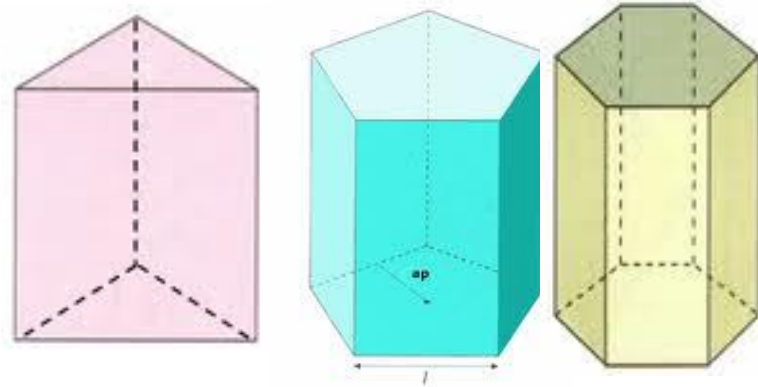
Elementos
de un
prisma
oblicuo



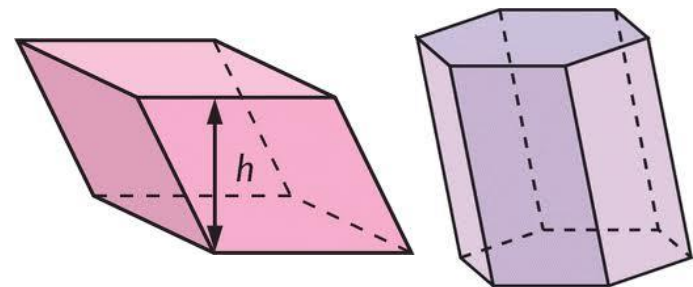
Ortoedro



Prisma recto



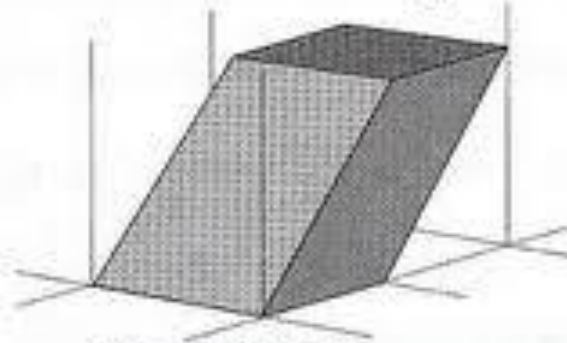
Prisma
oblicuo



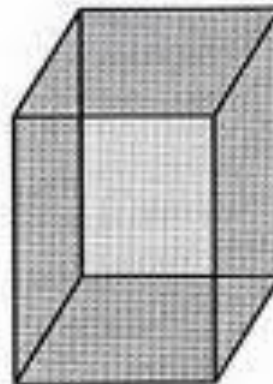
EJEMPLO



Prisma Recto Rectangular



Prisma Oblicuo



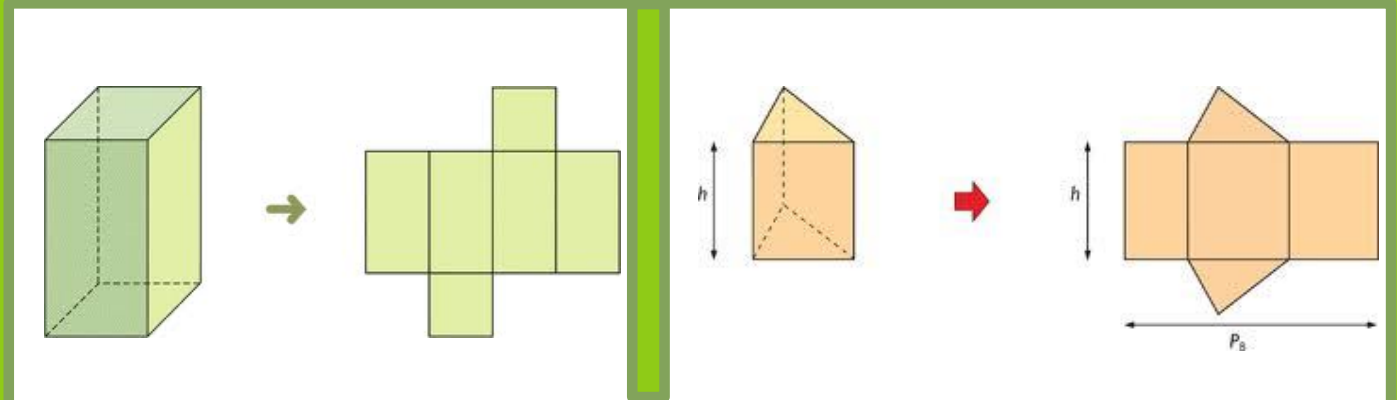
Paralelepipedo

DESARROLLO DEL PRISMA

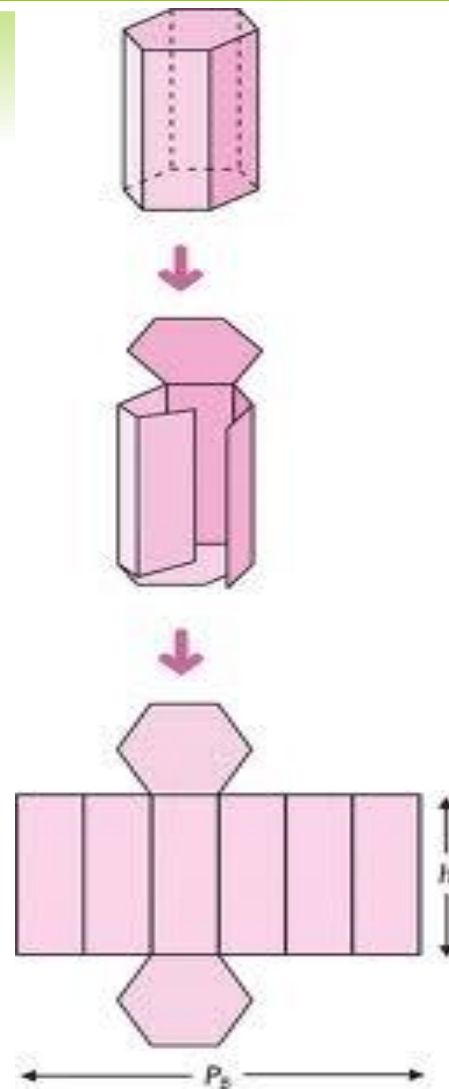
El desarrollo plano de un prisma recto está formado por:

- Un rectángulo compuesto por sus caras laterales, de altura, la altura del prisma, y ancho, el perímetro de la base.
- Los dos polígonos de las bases.

EJEMPLOS:



**EJEMPLO
DETALLADO**



ÁREA DEL PRISMA

⌚ partir del desarrollo del prisma recto podemos calcular su área.

· **Área lateral, A_L**

Es la suma de las áreas de sus caras laterales. Como el desarrollo es un rectángulo, el área es $A_L = P_B \cdot h$.

· **Área de las bases, A_B**

Es la suma de las áreas de las dos bases.

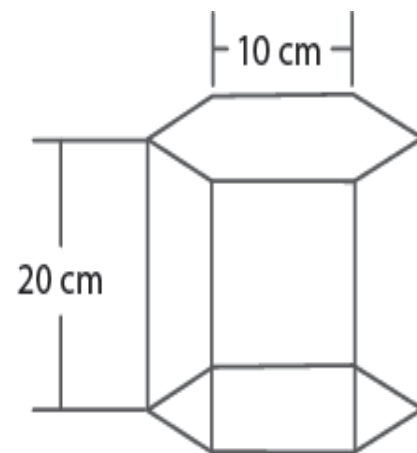
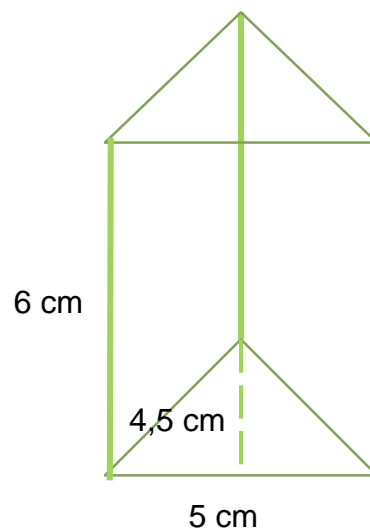
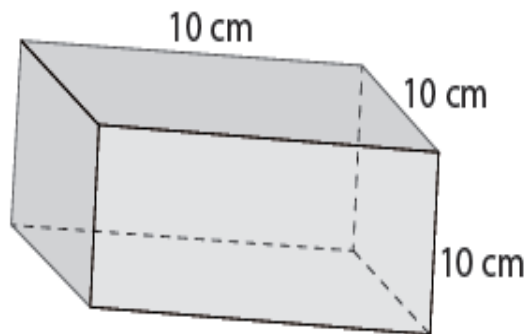
El área total de un prisma recto es:

$$A_T = A_L + 2 \cdot A_B = P_B \cdot h + 2A_B$$

RESOLVER LOS SIGUIENTES PRISMAS

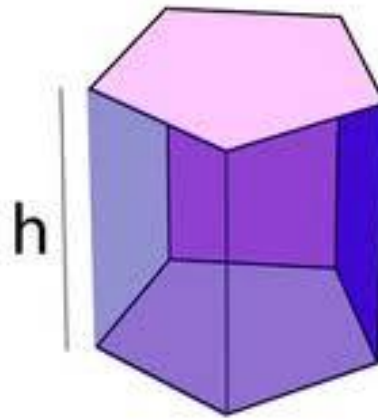
- Calcula el área total, área lateral y el volumen de los prismas de la siguiente figura. Ten en cuenta que la apotema de un hexágono regular de lado 10 cm es 8,66 cm.

Prismas de bases poligonales



EJEMPLO:

📎 Calcula el área total de este prisma regular.



$$A_L = P_B \cdot h = (3 \cdot 5) \cdot 7 = 105 \, dm^2$$

Como las bases son pentágonos regulares.

$$A_B = \frac{P_B \cdot a}{2} = \frac{(3 \cdot 5) \cdot 2,06}{2} = 15,45 \, dm^2$$

$$A_T = A_L + 2 \cdot A_B = 105 + 2 \cdot 15,45 = 135,9 \, dm^2$$

PIRÁMIDES



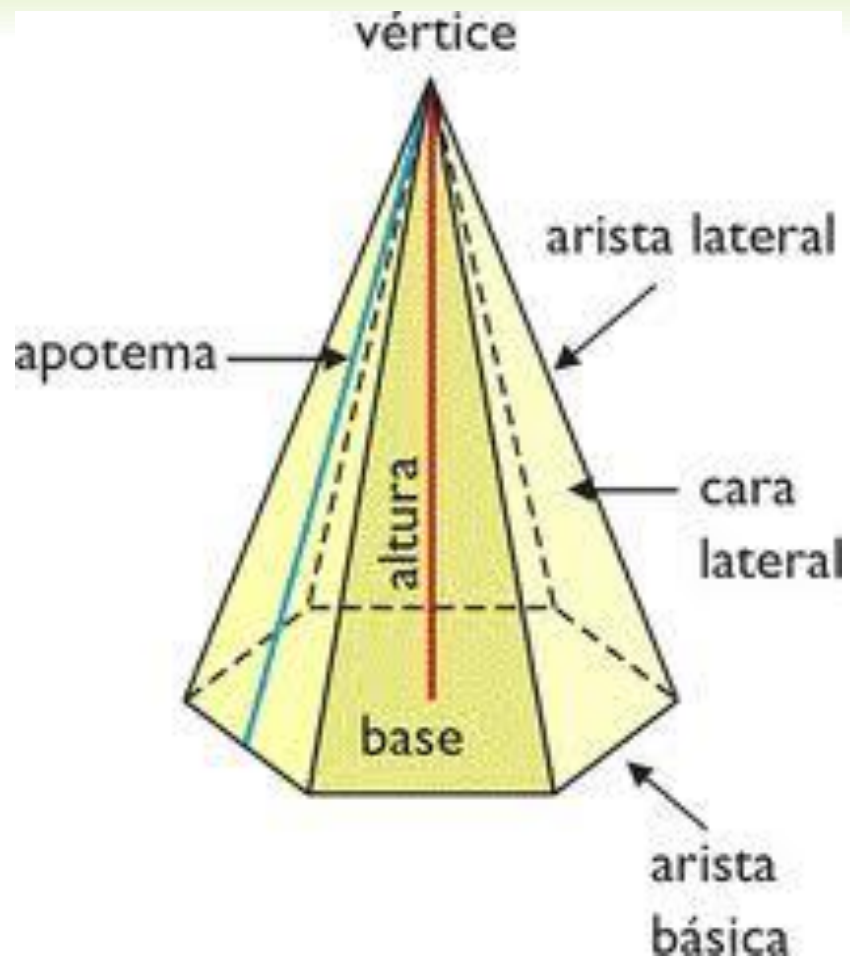
Una pirámide es un poliedro en el que una de sus caras es un polígono cualquiera y el resto son triángulos que concurren en su punto.

ELEMENTOS DE UNA PIRÁMIDE

Los elementos de una pirámide son:

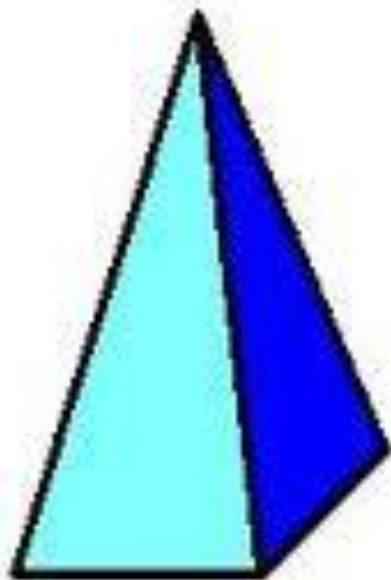
- Base: es un polígono cualquiera.
- Caras laterales: son triángulos que concurren en un punto llamado vértice de la pirámide.
- Aristas básicas y aristas laterales: son las aristas de la base y de las caras laterales, respectivamente.
- Altura: es el segmento perpendicular trazado desde el vértice a la base.

EJEMPLO:

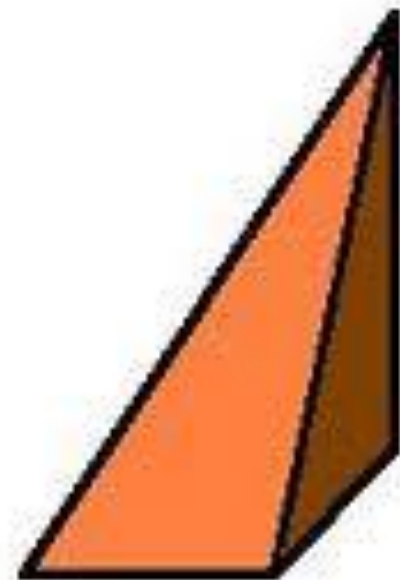


CLASES DE PRISMAS

Como en los prismas, para nombrar las pirámides se hace referencia al polígono de la base. Una pirámide es recta si todas sus caras laterales son triángulos isósceles. Si no es así, decimos que es oblicua.

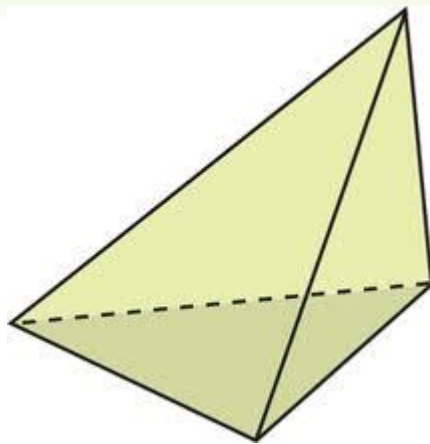


pirámide recta

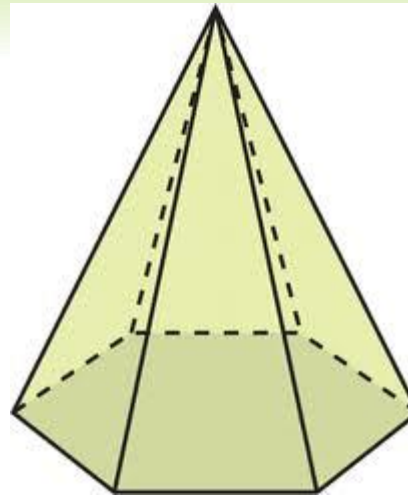


pirámide oblicua

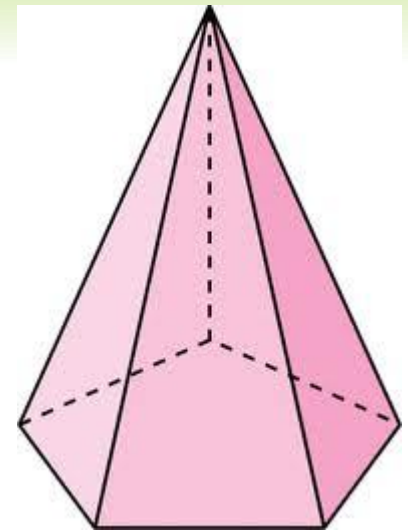
EJEMPLOS:



Pirámide
triangular
oblicua



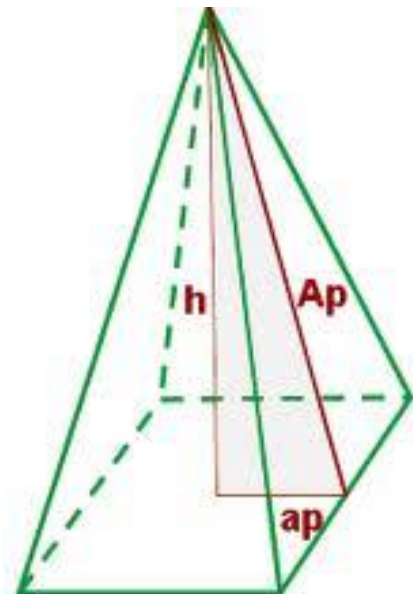
Pirámide
hexagonal
recta



Pirámide
pentagonal
recta

Una pirámide es regular si es recta y tiene como base un polígono regular. Si no cumple estas condiciones, se denomina irregular.

Se llama apotema de una pirámide regular a la altura de cualquiera de sus caras laterales.



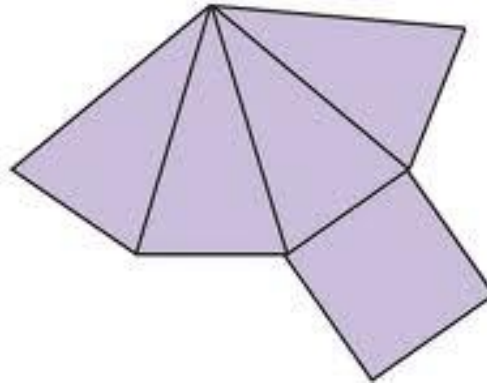
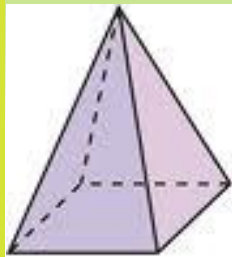


DESARROLLO DE LA PIRÁMIDE

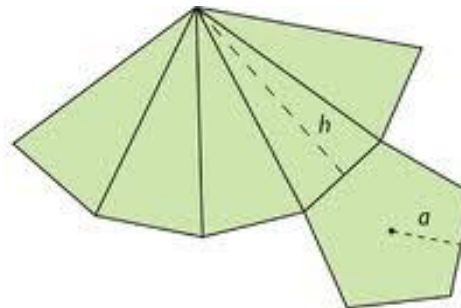
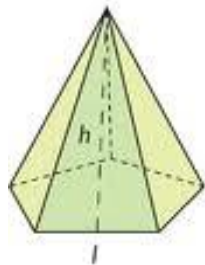
El desarrollo plano de una pirámide regular está formada por:

- Tanto triángulos isósceles iguales como lados tenga la base.
- El polígono de la base.

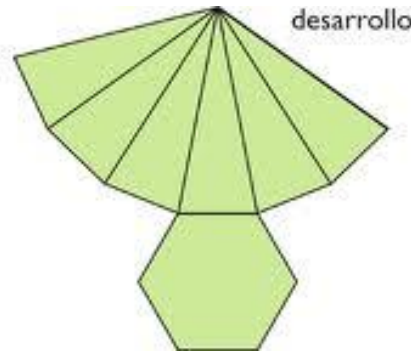
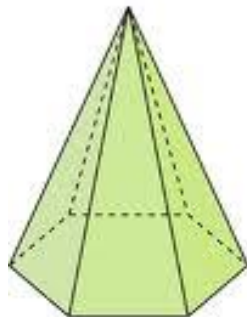
EJEMPLOS:



← Pirámide cuadrangular



← Pirámide pentagonal



← Pirámide hexagonal

ÁREA DE LA PIRÁMIDE

⌚ partir del desarrollo de una pirámide regular podemos calcular su área.

·Área lateral, A_L

Si n es el número de lados de la base, la suma de las áreas de los n triángulos de sus caras laterales es: $A_L = n \cdot \frac{b \cdot a}{2} = \frac{P_B \cdot a'}{2}$.

·Área de la base, A_B

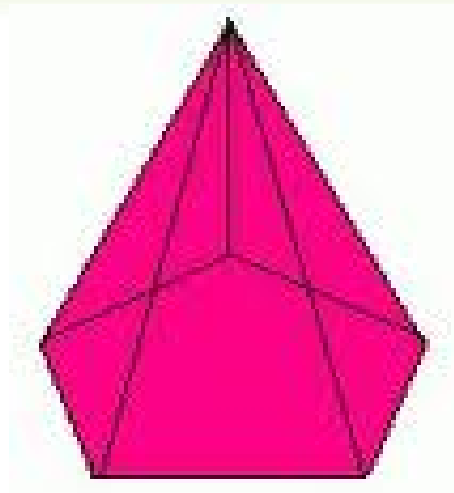
Como la base es un polígono regular: $A_B = \frac{P_B \cdot a'}{2}$.

El área total de una pirámide regular es:

$$A_T = A_L + A_B = \frac{P_B \cdot a}{2} + \frac{P_B \cdot a'}{2}$$

EJEMPLOS:

2) Calcula el área total de esta pirámide regular.



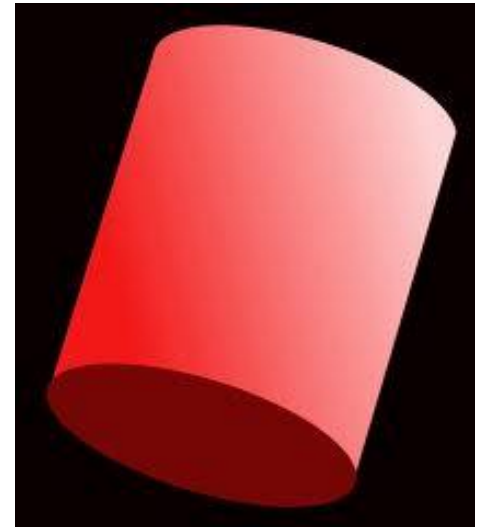
$$A_L = \frac{P_B \cdot a}{2} = \frac{(5 \cdot 6) \cdot 9}{2} = 135 \text{ cm}^2$$

$$A_B = \frac{P_B \cdot a'}{2} = \frac{(5 \cdot 6) \cdot 4,13}{2} = 61,95 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_L + A_B = 135 + 61,95 = 196,95 \text{ cm}^2$$

CUERPOS DE REVOLUCIÓN

Un cuerpo de revolución es un cuerpo geométrico obtenido a partir de una figura plana que gira alrededor de un eje.



CILINDRO

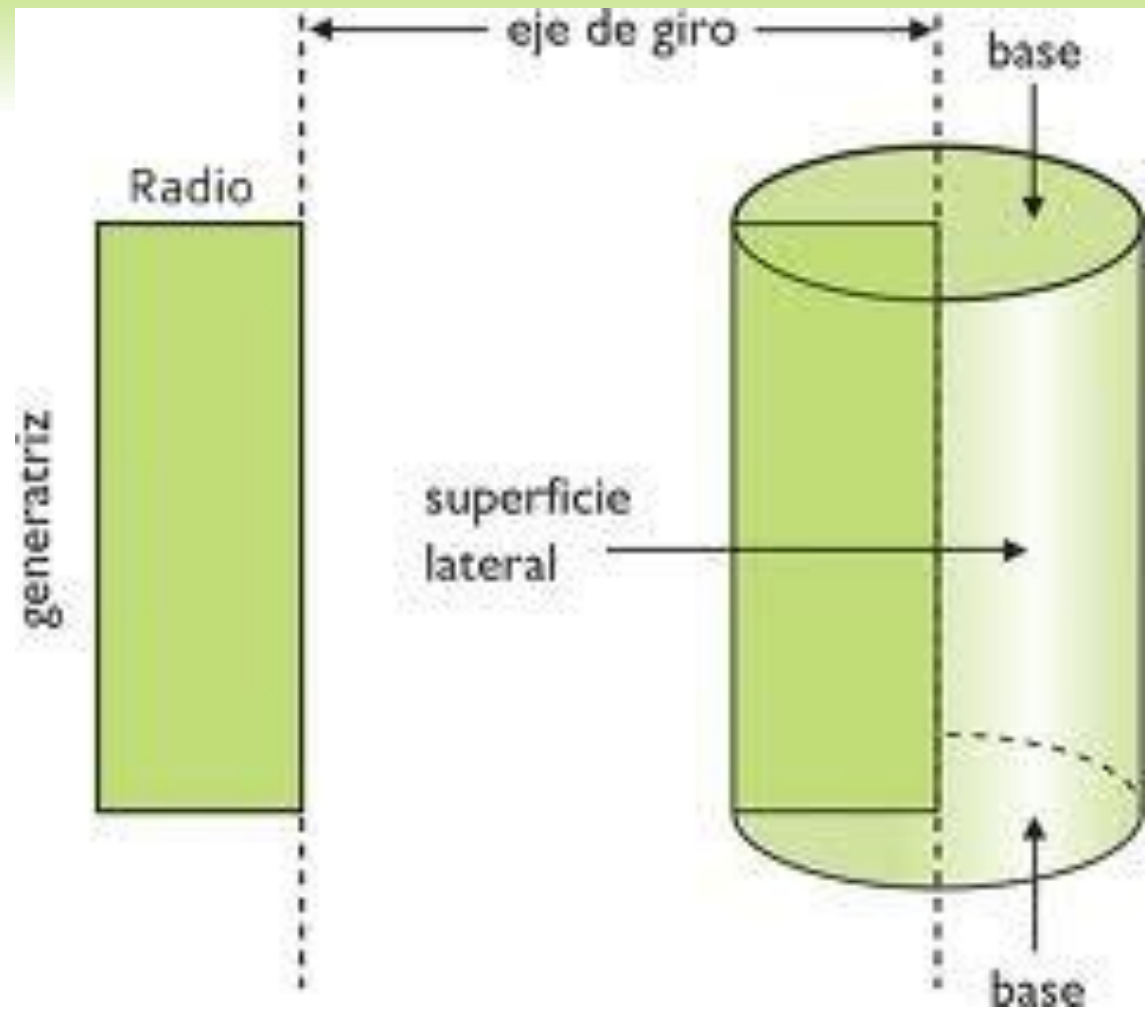
Un cilindro es un cuerpo geométrico engendrado a partir de un rectángulo que gira alrededor de uno de sus lados.



ELEMENTOS DEL CILINDRO

- Eje del cilindro: es el lado sobre el que gira el rectángulo que genera el cilindro.
- Altura: es la longitud del eje.
- Generatriz: es la longitud del lado opuesto al eje, o al lado que genera la superficie lateral del cilindro.
- Bases: son dos círculos iguales y paralelos que se generan al girar los lados perpendiculares al eje.
- Radio: es el radio de la base, o la longitud de los lados perpendiculares al eje.

EJEMPLO



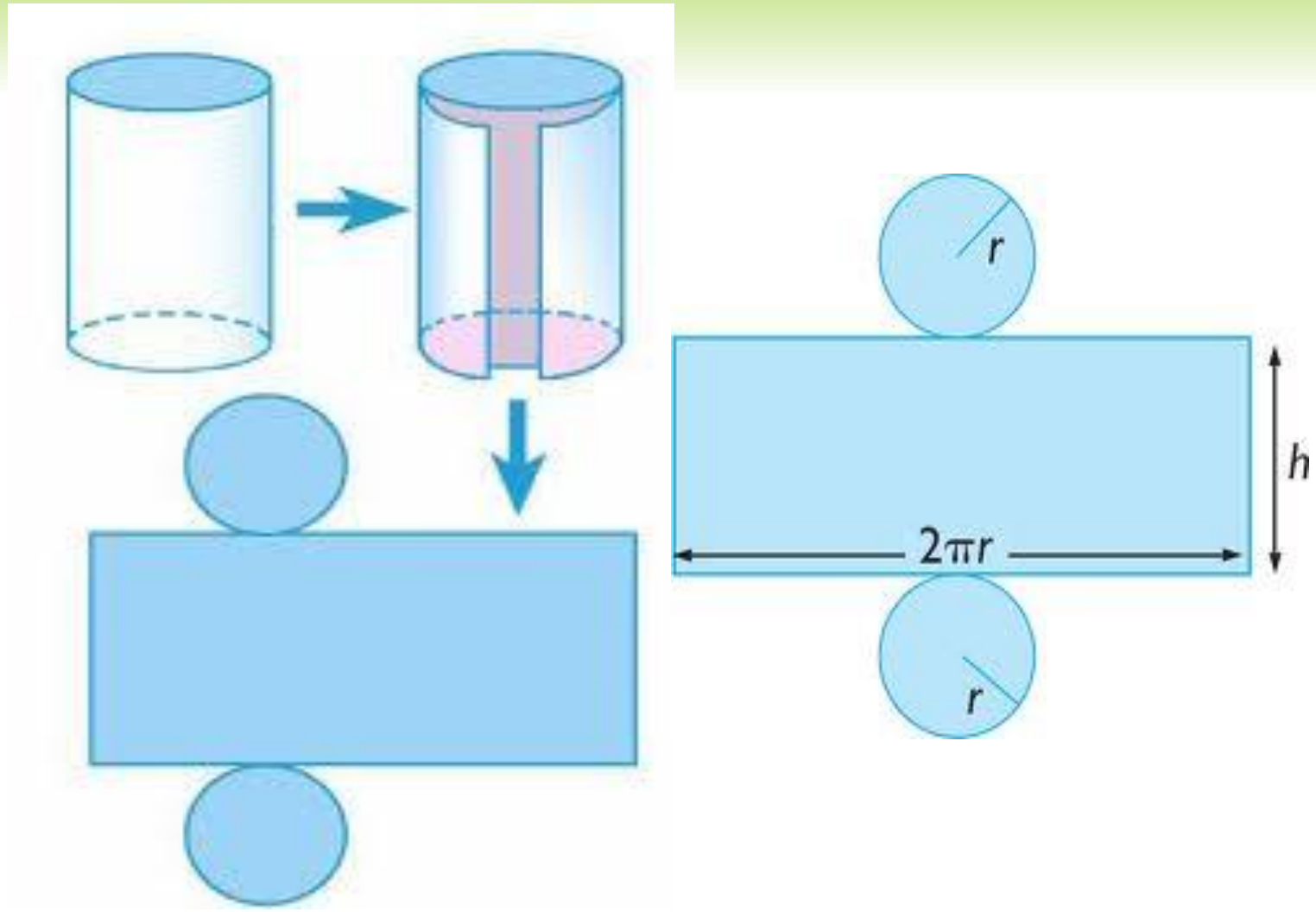


DESARROLLO PLANO DEL CILINDRO

El desarrollo de un cilindro está formado por:

- Un rectángulo cuya base es la longitud de la circunferencia de la base, y su altura es la altura del cilindro.
- Dos círculos iguales que constituyen las bases.

EJEMPLO



ÁREA DEL CILINDRO

⌚ partir del desarrollo del cilindro podemos calcular su área.

·Área lateral, A_L

Es el área de un rectángulo cuya base es la longitud de la circunferencia de la base, $2\pi r$, y la altura, h , es la altura del cilindro.

$$A_L = 2\pi r \cdot h$$

·Área de las bases, A_B

Como las bases son círculos, cada base tendrá un área de:
 $A_B = \pi r^2$.

El área total de un cilindro es:

$$A_T = A_L + 2 \cdot A_B = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

4) Determina la superficie de metal necesaria para fabricar una lata de conservas de forma cilíndrica, de 10 cm de altura y 4 cm de radio de la base.

$$A_L = 2\pi rh = 2\pi \cdot 4 \cdot 10 = 251,2 \text{ cm}^2$$

$$A_B = \pi r^2 = \pi \cdot 4^2 = 50,24 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_L + 2A_B = 251,2 + 2 \cdot 50,24 = 351,68 \text{ cm}^2$$



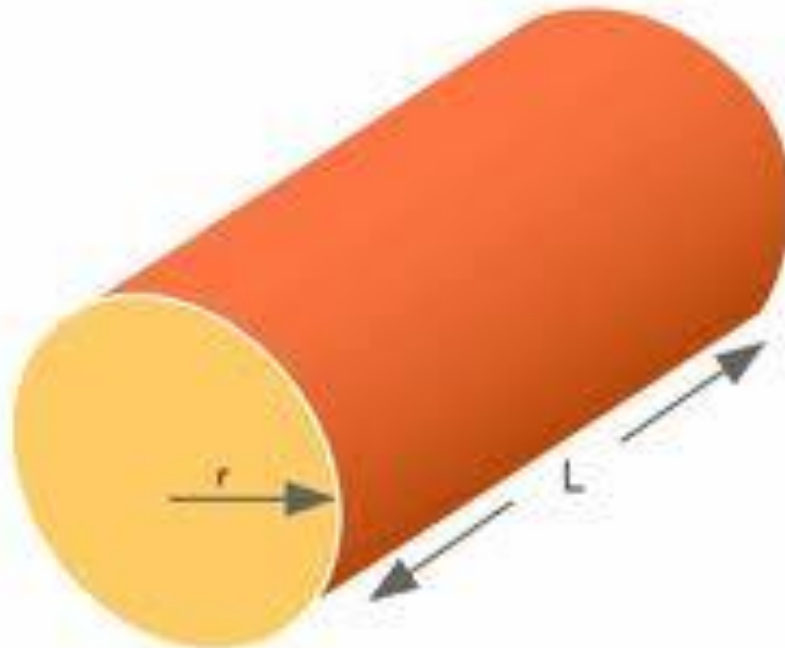
EJEMPLOS

③) Calcula el área total de este cilindro.

$$A_L = 2\pi rh = 2\pi \cdot 3 \cdot 5 = 94,2 \text{ dm}^2$$

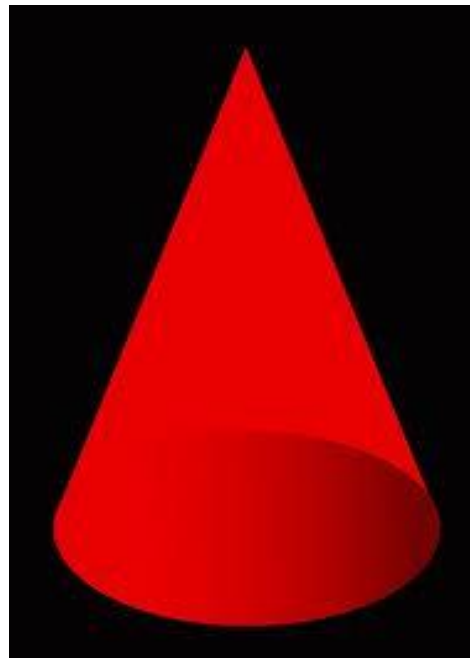
$$A_B = \pi r^2 = \pi \cdot 3^2 = 28,26 \text{ dm}^2$$

$$A_T = A_L + 2A_B = 94,2 + 2 \cdot 28,26 = 150,72 \text{ dm}^2$$

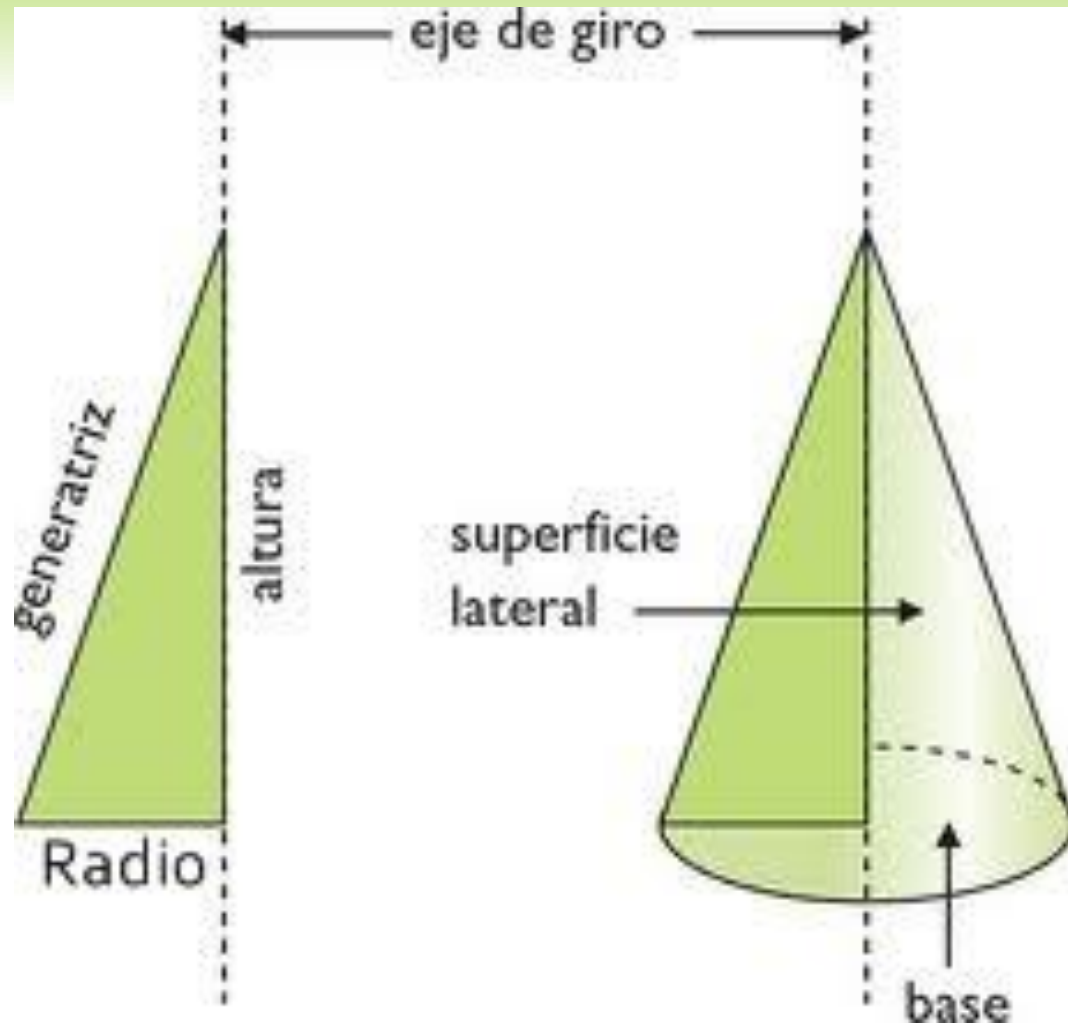


CONO

Un cono es un cuerpo geométrico engendrado por un triángulo rectángulo que gira alrededor de uno de sus catetos.



EJEMPLO

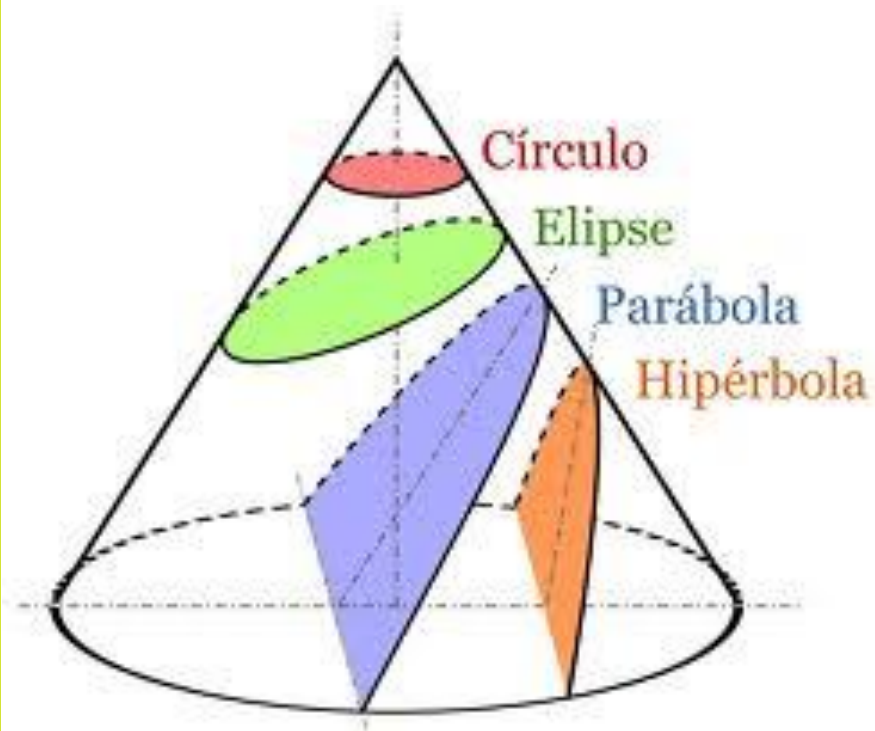
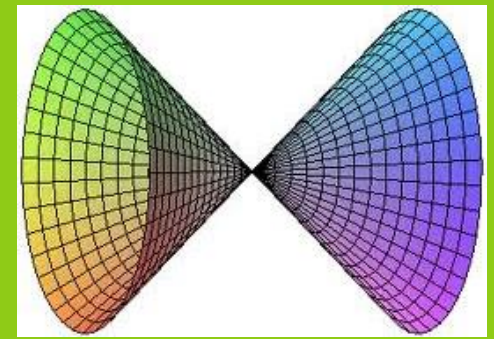




ELEMENTOS DEL CONO

- Eje del cono: es el cateto sobre el que gira el triángulo.
- Altura: es la longitud del eje.
- Generatriz: es la longitud de la hipotenusa del triángulo.
- Base: es el círculo generado al girar el cateto perpendicular al eje.
- Radio: es el radio de la base, o la longitud del cateto perpendicular al eje.

AMPLIACIÓN

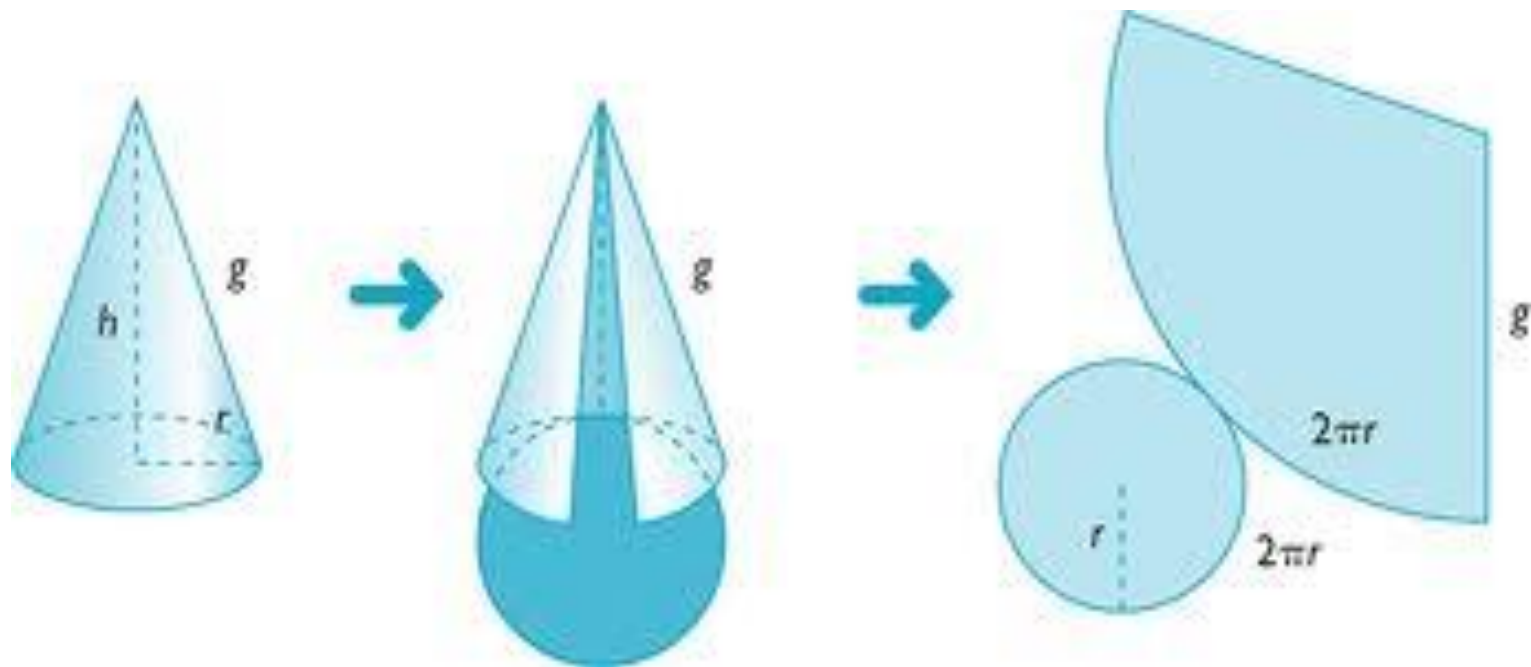


DESARROLLO PLANO DEL CONO

El desarrollo de un cono está formado por:

- Un sector circular con longitud $2\pi r$ (siendo r el radio de la base), y radio, la generatriz del cono.
- Un círculo.

EJEMPLO

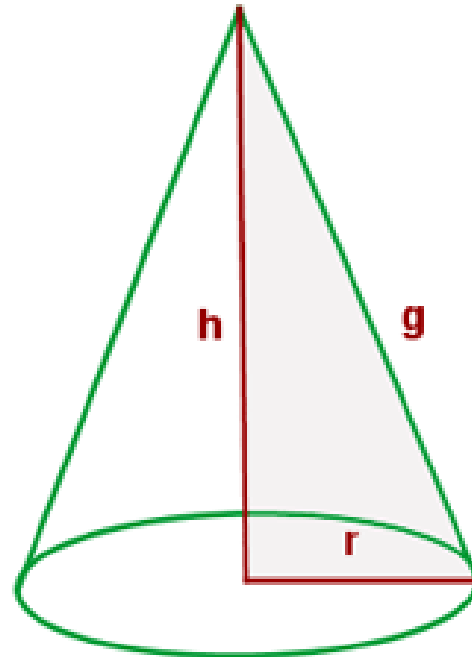


GENERATRIZ DEL CONO

El **cono** es un **cuerpo de revolución** engendrado por un **triángulo rectángulo** al **girar** en torno a uno de sus **catetos**, que será la **altura del cono** y la **hipotenusa** será la **generatriz**.

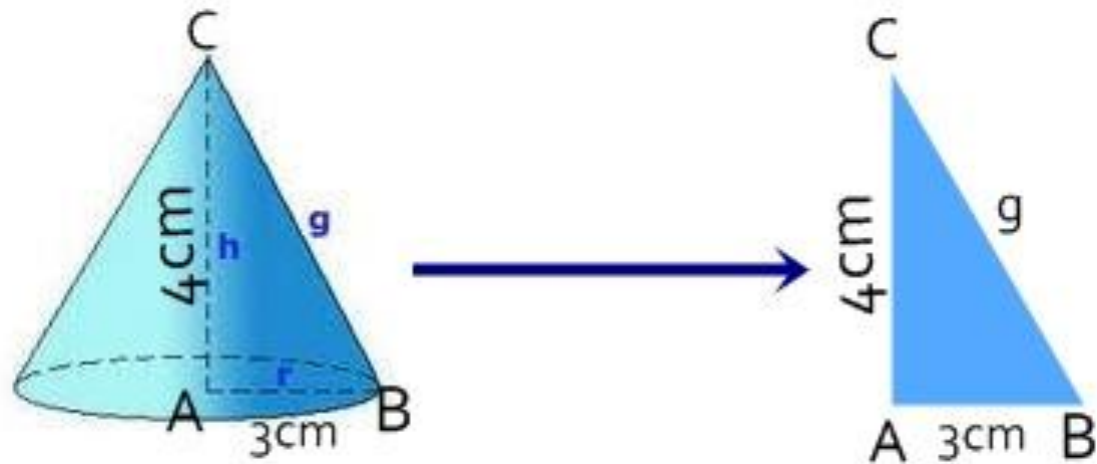
Por el teorema de Pitágoras la **generatriz** del **cono** será igual a:

$$g^2 = h^2 + r^2 \rightarrow g = \sqrt{h^2 + r^2}$$



EJEMPLO

5) Calcula la generatriz de este cono.



El radio de la base, la altura y la generatriz de un cono forman un triángulo rectángulo.

Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$g^2 = 4^2 + 3^2 \rightarrow g = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ cm}$$

ÁREA DEL CONO

⌚ partir del desarrollo de un cono podemos calcular su área.

· **Área lateral, A_L**

Es el área de un sector circular con longitud $2\pi r$ y radio g .

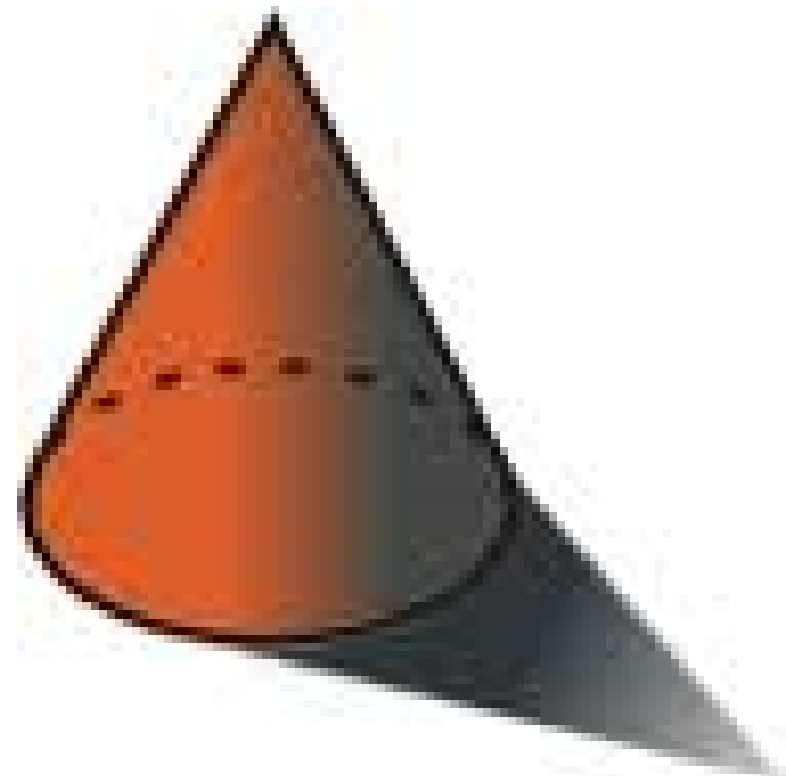
$$A_L = A_{\text{Sector circular}} = \frac{L_{\text{Arco}} \cdot \text{radio del sector}}{2} = \frac{2\pi r \cdot g}{2} = \pi r g$$

· **Área de la base, A_B**

Es el área del círculo: $A_B = \pi r^2$.

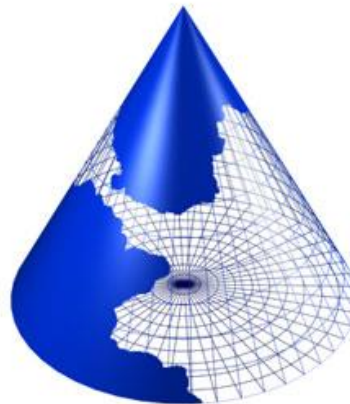
El área total de un cono es:

$$A_T = A_L + A_B = \pi r g + \pi r^2$$



EJEMPLO

6) Calcula el área total de este cono.



$$A_L = \pi r g = \pi \cdot 5 \cdot 20 = 314 \text{ cm}^2$$

$$A_B = \pi r^2 = \pi \cdot 5^2 = 78,5 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_L + A_B = 314 + 78,5 = 392,5 \text{ cm}^2$$

ESFERA

Una esfera es un cuerpo de revolución engendrado por un semicírculo que gira sobre su diámetro.





ELEMENTOS DE LA ESFERA

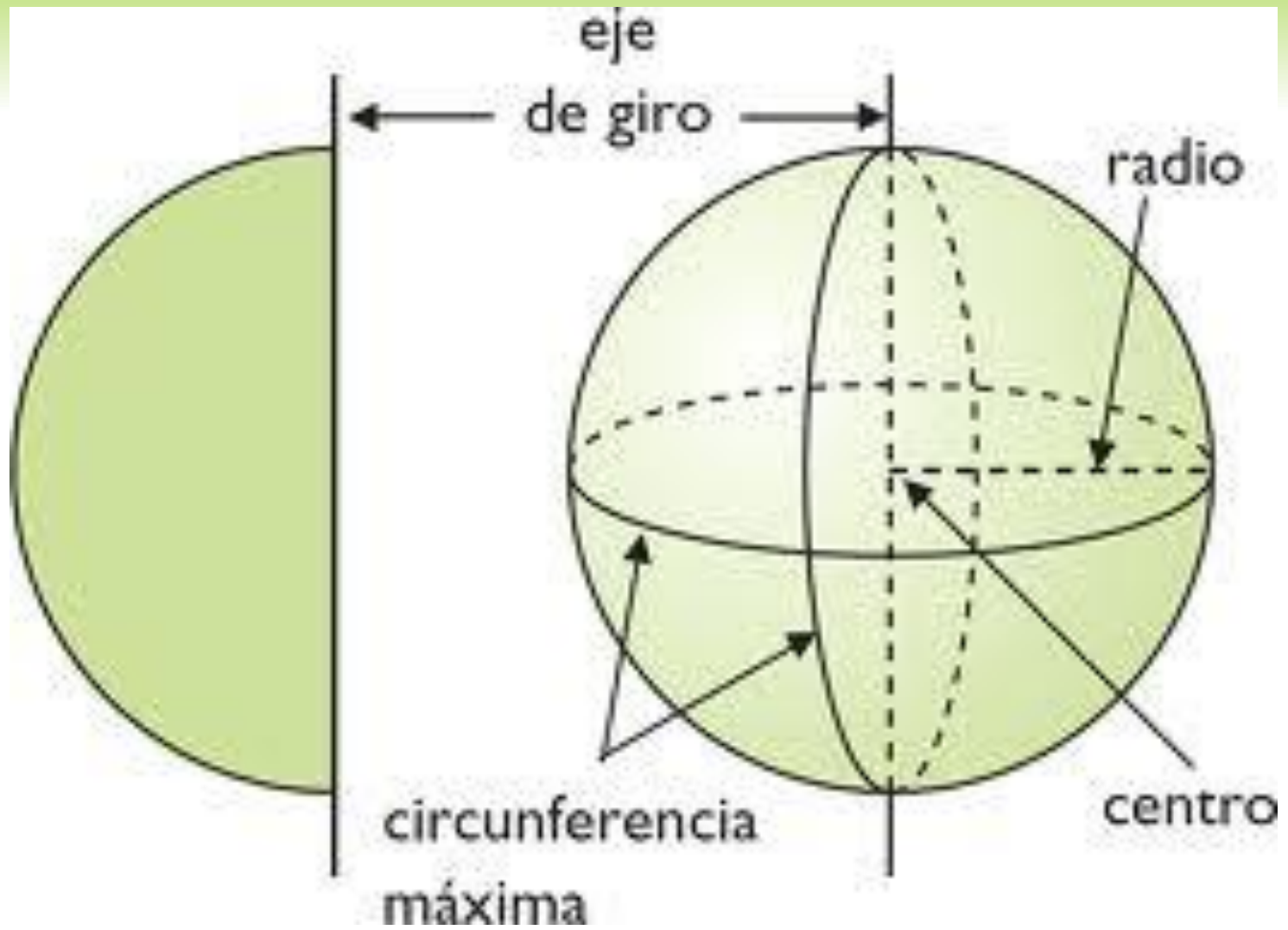
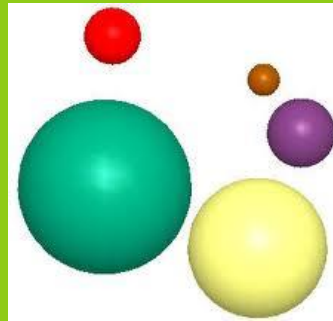
- Eje de la esfera: es el diámetro sobre el que gira el semicírculo.

- Centro: es el centro del semicírculo.

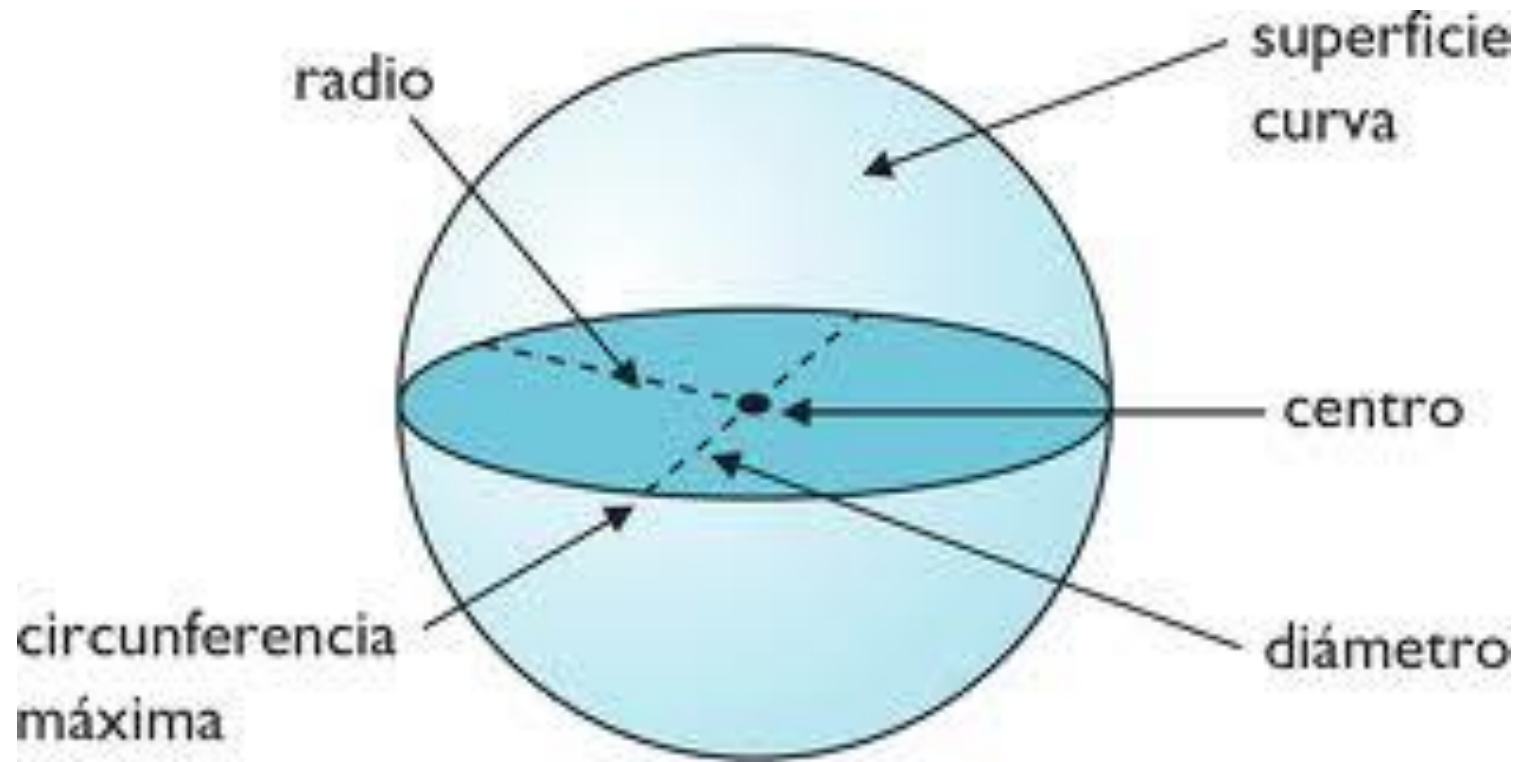
- Radio: es el radio del semicírculo.

La esfera no tiene desarrollo plano

EJEMPLO



AMPLIACIÓN



ÁREA DE LA ESFERA

El área de una esfera de radio r
es: $A_T = 4\pi r^2$

